

# Scienza e estetica dei nodi di cravatta

DI ANDREA CENTOMO & GIOVANNI PAOLINI

16 novembre 2009

## Introduzione

Lo studio della matematica dei nodi di cravatta è stato affrontato in modo rigoroso e completo diversi anni fa da T. Fink e Y. Mao in [3]. L'idea alla base del lavoro consiste nel pensare un nodo di cravatta come un percorso casuale di Markov persistente su un reticolo triangolare. Da questa formalizzazione è possibile analizzare la struttura topologica dei nodi e ottenere la loro classificazione in base a dimensione e forma. Nel lavoro di Fink e Mao vengono anche stabiliti i parametri di simmetria e equilibrio che permettono di selezionare nell'insieme dei nodi possibili quelli esteticamente soddisfacenti. I contenuti matematici di [3] si trovano riassunti, in modo piuttosto succinto, nell'Appendice di [1] mentre una trattazione divulgativa dell'intero argomento si trova condensata in [2]. In queste pagine viene descritta inizialmente la notazione usata da Fink e Mao per descrivere un nodo di cravatta e vengono discussi i parametri estetici introdotti dagli stessi autori. Successivamente vengono risolti alcuni problemi matematici che nascono in modo piuttosto naturale in questo contesto.

## 1 Annodare la cravatta

Una volta che la cravatta è sistemata attorno al collo l'estremità larga (attiva) è avvolta a quella stretta (passiva) in modo che quest'ultima sia libera di scorrere intorno al nodo che ne deriva.

### 1.1 Stato iniziale

Prima di eseguire un qualsiasi nodo la cravatta si trova in uno di due stati possibili: nel primo stato  $F$  (fronte) la parte non decorata della cravatta è a contatto con la camicia, mentre nel secondo stato  $R$  (retro) è la parte decorata ad essere a contatto della camicia.



Figura 1. Stati iniziali:  $R$  e  $F$ .

### 1.2 Movimenti base

Il nodo di cravatta viene eseguito di fronte ad uno specchio utilizzando sei possibili movimenti che vengono rappresentati nella notazione di Fink e Mao [1] con i simboli

$$S_{\otimes} \quad S_{\circ} \quad D_{\otimes} \quad D_{\circ} \quad C_{\otimes} \quad C_{\circ}$$

dove

- $S$  indica un movimento che allo specchio appare verso sinistra

- $D$  indica un movimento che allo specchio appare verso destra
- $C$  indica un movimento che allo specchio appare centrale

Con il simbolo  $\otimes$  si indica un movimento verso “l’interno” della camicia mentre con  $\odot$  si indica un movimento verso “l’esterno” della camicia.

### 1.3 Chiusura

Per completare il nodo l’estremità attiva deve essere avvolta sopra la parte anteriore, ossia si devono eseguire i movimenti  $D\odot S\otimes$  oppure  $S\odot D\otimes$ , quindi si procede verso il centro all’interno della camicia con un movimento  $C\odot$  e alla fine si passa attraverso il nodo scorsoio frontale preparato dai movimenti precedenti e si annoda (l’annodamento non è considerata un passaggio e verrà indicato nel seguito con il simbolo  $A$ ). Riassumendo si hanno due possibili sequenze di chiusura di un nodo:  $D\odot S\otimes C\odot A$  oppure  $S\odot D\otimes C\odot A$ .

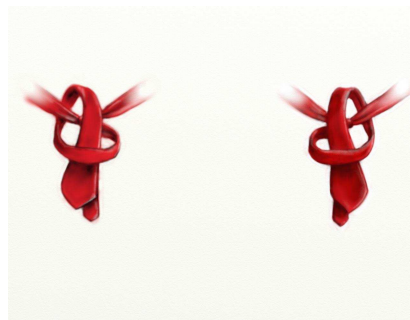


Figura 2. Movimenti di chiusura

**Esempio 1.** Il nodo mezzo Windsor è descritto dalla sequenza  $S\otimes D\odot C\otimes S\odot D\otimes C\odot A$  e la sua realizzazione<sup>1</sup> è un esercizio molto utile in quanto contiene tutti i sei movimenti fondamentali visti sopra.

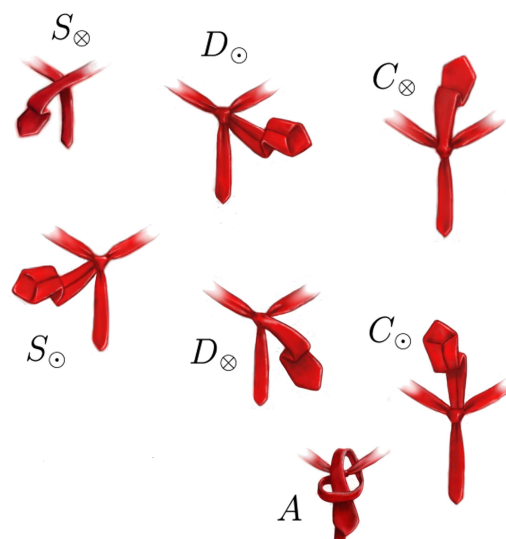


Figura 3. Sequenza di realizzazione per il nodo mezzo Windsor

1. Esistono in YouTube molti video che mostrano come si realizza un nodo mezzo Windsor. In molti di essi il nodo mezzo Windsor viene presentato nella sua variante self-releasing  $S\otimes D\odot C\otimes D\odot S\otimes C\odot A$ .

In generale, quando si esegue un nodo, devono essere rispettati i seguenti *vincoli*:

- I. si inizia sempre con un movimento a sinistra<sup>2</sup>:  $S_{\odot}$  (per i nodi a numero dispari di passaggi) o con  $S_{\otimes}$  (per i nodi a numero pari di passaggi)
- II. non si può eseguire due volte consecutive uno stesso movimento
- III. ogni nodo si conclude con una sequenza obbligata di passaggi:  $D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$  o  $S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$ .

## 2 Linguaggio matematico

I primi due termini che si incontrano nel linguaggio matematico che serve a descrivere un nodo sono: dimensione e forma.

**Definizione 2.** *La dimensione  $d$  di un nodo è il numero di passaggi in cui viene eseguito ossia*

$$d = n_d + n_s + n_c$$

dove  $n_d$  indica il numero di passaggi a destra,  $n_s$  indica il numero di passaggi a sinistra e  $n_c$  indica il numero di passaggi centrali.

**Esempio 3.** Il nodo mezzo Windsor  $S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$  ha dimensione  $d = 2 + 2 + 2 = 6$  in quanto viene eseguito in 6 passaggi con  $n_d = n_s = n_c = 2$  (si ricorda che  $A$  non si considera un passaggio).

La simmetria del nodo di cravatta impone che il numero di passaggi a destra e a sinistra siano uguali o in numero non troppo diverso tra loro. Fissata la dimensione  $d$  di un nodo, è sensato stabilire che la sua *forma* sia descritta dal numero di passaggi centrali che lo caratterizzano.

**Definizione 4.** *La forma di un nodo  $\gamma$  è il numero di passaggi centrali che servono per realizzarlo*

$$\gamma = n_c$$

**Esempio 5.** Il nodo mezzo Windsor  $S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$  ha forma  $\gamma = 2$ .

## 3 Estetica del nodo

Per ragioni di natura fisica (la cravatta ha una lunghezza limitata) e per ragioni estetiche (conviene evitare nodi troppo spessi e quindi con troppi passaggi) per i nodi di cravatta che si utilizzano concretamente vale la limitazione

$$3 \leq d \leq 9.$$

### 3.1 Rapporto forma-dimensione

Il primo parametro estetico che Fink e Mao considerano è rappresentato dal rapporto forma-dimensione

$$r = \frac{\gamma}{d}$$

tra forma e dimensione del nodo. Nodi di dimensione elevata con pochi centri o viceversa nodi di bassa dimensione con molti centri difficilmente, secondo questi autori, hanno una buona resa estetica. Per questa ragione, seguendo [1], è conveniente imporre ad un nodo *estetico* la limitazione

$$\frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

---

<sup>2</sup>. I mancini o coloro che non utilizzano lo specchio per eseguire un nodo possono utilizzare tutti i risultati della trattazione scambiando il movimento  $S$  con  $D$ .

### 3.2 Grado di simmetria

Il secondo parametro estetico che Fink e Mao introducono è il *grado di simmetria*  $s$  di un nodo definito come il valore assoluto della differenza tra il numero di passaggi a destra e a sinistra:

$$s = |n_d - n_s|.$$

Un nodo *estetico* di una classe deve soddisfare la condizione

$$s \leq 1. \quad (2)$$

**Esempio 6.** Per il nodo mezzo Windsor  $S_{\otimes}D_{\circ}C_{\otimes}S_{\circ}D_{\otimes}C_{\circ}A$  è facile vedere che  $s = 0$ .



**Figura 4.** La perfetta simmetria di un mezzo-Windsor

### 3.3 Equilibrio

Il terzo parametro estetico è l'*equilibrio* che esprime il grado in cui i movimenti che definiscono un nodo risultano ben mescolati. Un nodo ben equilibrato avrà il pregio di essere annodato strettamente e di mantenere la forma. Assunto che:

- alle transizioni antiorarie (nel riferimento della camicia)  $C \rightarrow D$ ,  $D \rightarrow S$  e  $S \rightarrow C$  si assegna il valore  $+1$
- alle transizioni orarie nello stesso riferimento  $D \rightarrow C$ ,  $S \rightarrow D$  e  $C \rightarrow S$  si assegna il valore  $-1$

si definisce *equilibrio* di un nodo la quantità

$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{d-1} |\omega_i - \omega_{i-1}|$$

dove  $\omega_i$  è il valore assegnato alla transizione dal movimento  $i$ -esimo al successivo.

**Esempio 7.** Consideriamo come al solito il nodo mezzo Windsor  $S_{\otimes}D_{\circ}C_{\otimes}S_{\circ}D_{\otimes}C_{\circ}A$  con i passaggi di Figura 1. Le transizioni che intervengono nella realizzazione del nodo sono

$$S \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow C$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} (|\omega_2 - \omega_1| + |\omega_3 - \omega_2| + |\omega_4 - \omega_3| + |\omega_5 - \omega_4|) = \\ &= \frac{1}{2} (|-1 + 1| + |-1 + 1| + |-1 + 1| + |-1 + 1|) = 0 \end{aligned}$$

Un nodo *estetico* deve minimizzare il valore di  $e$ .

In conclusione le caratteristiche che un nodo deve soddisfare per essere estetico possono essere riassunte come segue:

- aver un buon rapporto forma-dimensione;
- essere simmetrico;

C) essere equilibrato.

Stato iniziale	$d$	$\gamma$	sequenza	$r$	$s$	$e$	Nome del nodo
$R$	3	1	$S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	1/3	0	0	<b>Orientale</b>
$F$	4	1	$S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1/4	1	1	Tiro a quattro
$R$	5	1	$S_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	1/5	0	2	Kelvin
$R$	5	2	$S_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	2/5	1	1	Pratt
$F$	6	1	$S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1/6	1	3	Victoria
$F$	6	2	$S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	1/3	0	0	<b>Mezzo Windsor</b>
$R$	7	2	$S_{\odot}D_{\otimes}S_{\otimes}C_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	2/7	1	1	<i>St. Andrew</i>
$R$	7	3	$S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	3/7	0	1	Plattsburgh
$F$	8	2	$S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\otimes}D_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	1/4	0	2	Cavendish
$F$	8	3	$S_{\otimes}C_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	3/8	0	0	<b>Windsor</b>
$R$	9	2	$S_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	2/9	1	3	Grantchester
$R$	9	3	$S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	1/3	0	0	<b>Hanover</b>
$R$	9	4	$S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	4/9	1	2	Balthus

**Tabella 1.** Nodi estetici

Nella Tabella 1 sono evidenziati in grassetto i nodi più estetici che esistono!

## 4 Matematica dei nodi

La notazione di Fink e Mao è molto utile come riferimento per l'esecuzione pratica dei nodi di cravatta. Tuttavia nella trattazione matematica che segue un nodo sarà descritto in modo più semplice utilizzando *stringhe di caratteri* che contengono solo le lettere  $S$ ,  $D$  e  $C$ :

1. i simboli  $\otimes$  e  $\odot$  vengono omessi in quanto sono univocamente determinati dal fatto che seguono una legge alternante e che nei nodi con numero dispari di passaggi si inizia sempre con  $\odot$  mentre in quelli con numero pari di passaggi si inizia sempre con  $\otimes$ .

Osserviamo di passaggio che nei nodi che iniziano con  $\otimes$  la cravatta viene disposta inizialmente mostrando la parte anteriore (come in Figura 1) mentre negli altri casi viene disposta mostrando la parte posteriore;

2. un nodo che si esegue in  $d$  passaggi è descritto da una stringa di  $n = d - 2$  caratteri. Gli ultimi due passaggi prima di  $A$ , sono infatti sempre rappresentati da  $D_{\otimes}C_{\odot}$  o  $S_{\otimes}C_{\odot}$  e sono univocamente determinati dal movimento a sinistra o a destra con cui inizia una sequenza di chiusura.

Ad esempio, il nodo mezzo Windsor  $S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$ , sarà descritto matematicamente dalla stringa  $SDCS$  in quanto il quarto movimento  $S_{\odot}$  impone che la conclusione  $D_{\otimes}C_{\odot}A$  e trattandosi di un nodo con numero pari di passaggi (i passaggi sono 6) “interno” e “esterno” della camicia si alternano a partire da  $\otimes$ .

I vincoli I, II e III esposti in precedenza si possono riformulare per le stringhe come segue

- a) ogni stringa inizia con  $S$
- b) due lettere consecutive di una stringa non possono essere uguali
- c) ogni stringa si conclude con  $S$  o  $D$

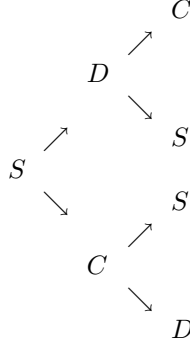
Nel seguito indicheremo con  $\mathcal{S}_n$  l'insieme delle stringhe di  $n \geq 1$  caratteri che soddisfano i vincoli precedenti.

### 4.1 Contiamo i nodi

Il primo problema che affrontiamo consiste nel calcolo della cardinalità di  $\mathcal{S}_n$  e può essere enunciato semplicemente come segue:

**Problema 1.** *Quante stringhe  $T_n$  contiene  $\mathcal{S}_n$ ?*

**Soluzione.** Per risolvere il problema è utile prendere le mosse dal seguente albero:



che descrive come, a partire da  $S$ , si possono costruire, passo dopo passo, tutte le stringhe possibili che soddisfano *solo* i vincoli a) e b). Se indichiamo con  $T_k(D)$ ,  $T_k(S)$  e  $T_k(C)$  il numero totale di stringhe che si ottengono al passo  $k$ , con  $k \geq 1$ , e che terminano rispettivamente con  $D$ ,  $S$  e  $C$  non è difficile vedere che

$$T_k(D) + T_k(S) + T_k(C) = 2^{k-1} \quad (3)$$

inoltre valgono le relazioni

$$\begin{cases} T_{k-1}(D) + T_{k-1}(S) = T_k(C) \\ T_{k-1}(C) + T_{k-1}(D) = T_k(S) \\ T_{k-1}(S) + T_{k-1}(C) = T_k(D) \end{cases} \quad (4)$$

che ci informano del fatto che il numero di stringhe di  $k$  caratteri che terminano con un dato movimento sono pari alla somma del numero di stringhe di  $k - 1$  caratteri che terminano con i due rimanenti movimenti. Utilizzando (4) si ha

$$T_{k+2}(S) = T_{k+1}(D) + T_{k+1}(C) = T_k(D) + T_k(C) + 2T_k(S)$$

da cui ricordando la (3) anche

$$T_{k+2}(S) = T_k(S) + 2^{k-1} \quad (5)$$

con  $T_1(S) = 1$  e  $T_2(S) = 0$ . In modo del tutto analogo si verifica che

$$T_{k+2}(D) = T_k(D) + 2^{k-1} \quad (6)$$

con  $T_1(D) = 0$  e  $T_2(D) = 1$ . Ora da (5) e (6) si ha

$$T_{k+2}(S) + T_{k+2}(D) = T_k(S) + T_k(D) + 2^k.$$

Indicato con  $T_k = T_k(S) + T_k(D)$  il numero totale di stringhe che soddisfano il vincolo c) dalla relazione precedente si ha

$$T_{k+2} = T_k + 2^k \quad (7)$$

con  $T_1 = T_2 = 1$ . Per renderci conto dell'andamento del numero totale di stringhe al variare di  $k$  osserviamo che

$$T_3 = 1 + 2 \quad T_4 = 1 + 2^2 \quad T_5 = 1 + 2 + 2^3 \quad T_6 = 1 + 2^2 + 2^4 \dots$$

Se  $k$  è pari ossia se  $k = 2p$ , utilizzando la formula della somma di un numero finito di termini iniziali della progressione geometrica, si ha

$$T_{2p} = \sum_{j=0}^{p-1} 2^{2j} = \frac{2^{2p} - 1}{3}$$

mentre se  $k$  è dispari, ossia se  $k = 2p + 1$ , in modo analogo si ha

$$T_{2p+1} = 1 + \sum_{j=0}^{p-1} 2^{2j+1} = 1 + 2 \left( \frac{2^{2p} - 1}{3} \right) = \frac{2^{2p+1} + 1}{3}.$$

In conclusione, posto  $k = n$ , la soluzione del Problema 1 è la seguente

$$T_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \quad (8)$$

Per ragioni di natura fisica (la cravatta ha una lunghezza limitata) e per ragioni estetiche (conviene evitare nodi troppo spessi e quindi con troppi passaggi) per i nodi di cravatta che si utilizzano concretamente vale la limitazione

$$1 \leq n \leq 7. \quad (9)$$

Avendo risolto il Problema 1, possiamo calcolare immediatamente il numero totale  $T$  di nodi di cravatta possibili attraverso la somma

$$T = \sum_{n=1}^7 T_n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^7 2^n + 1 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^7 2^n = \frac{2^8 - 1}{3} = 85.$$

## 4.2 La forma di un nodo

Come visto in precedenza la *forma* di un nodo è sia descritta dal numero  $\gamma$  di movimenti di centro  $C$  che lo caratterizzano. Nella rappresentazione matematica indichiamo il numero che individua la forma con  $k$  e, osservato che la sequenza di chiusura del nodo contiene sempre un unico movimento  $C$ , si ha la relazione

$$k = \gamma - 1.$$

Prima di affrontare il problema fondamentale del calcolo di tutte le possibili forme di un nodo di dimensione  $d$  vediamo di stabilire il numero di centri ammissibili per nodi di una prefissata dimensione. Osserviamo che:

- a)  $k \geq 0$  dove l'uguaglianza a zero si ha nel caso particolare (unico) della stringa in cui si alternano solo movimenti  $D$  e  $S$ ;
- b)  $k \leq \frac{n}{2} - 1$  Il valore massimo si calcola osservando che, per i vincoli posti, una stringa inizia e termina con movimenti *diversi* da  $C$ . Se la stringa ha  $n$  elementi, tolti il primo e l'ultimo, ne restano  $n - 2$ . Di questi  $n - 2$ , per rispettare i vincoli, al più la metà possono essere di tipo  $C$ .

In conclusione, nel caso pari, si ha

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

Il caso dispari si tratta in modo simile e avremo

$$0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}.$$

Finalmente possiamo affrontare il seguente.

**Problema 2.** *Quanti elementi  $F_n(k)$  di  $S_n$  hanno forma  $k$ ?*

**Soluzione.** Iniziamo considerando una qualsiasi stringa di  $n - k - 1$  caratteri e andiamo a sistemare in essa  $k$  lettere  $C$ . Come noto il numero di modi  $m$  in cui è possibile fare questo si esprime attraverso il coefficiente binomiale

$$m = \binom{n-k-1}{k}.$$

Una parte delle  $m$  stringhe parzialmente vuote contravviene al vincolo b) ossia in esse le lettere  $C$  compaiono anche consecutivamente. Come vedremo tra poco questo non è un problema. Prendiamo infatti un stringa  $s$  delle precedenti e aggiungiamo al suo inizio e dopo ogni  $C$  uno spazio vuoto. Riempiamo il primo spazio vuoto con  $S$ , per soddisfare il vincolo a), e alterniamo lettere  $D$  o  $S$  fino ad incontrare la prima lettera  $C$ . Nel primo spazio vuoto dopo la prima lettera  $C$  possiamo scegliere di inserire una lettera  $D$  o  $S$  fissata la quale rimane fissata univocamente la successione alternata di lettere  $S$  e  $D$  da inserire negli spazi vuoti fino ad incontrare la seconda lettera  $C$ . Procedendo in questo modo si ottiene una stringa di  $\mathcal{S}_n$  avente forma  $k$ . Ora, osservato che il completamento di una stringa dipende solo dalle  $k$  scelte  $S$  o  $D$  negli spazi vuoti a valle di ciascuna lettera  $C$ , è chiaro che il numero di stringhe che si possono generare riempiendo  $s$  è  $2^k$ . In conclusione allora

$$F_n(k) = 2^k \cdot \binom{n-k-1}{k} \quad (10)$$

Una classe di nodi sarà individuata dalla coppia ordinata  $\{d, \gamma\}$  (dimensione e forma) e, tenuto conto della limitazione (1), i nodi di cravatta che si realizzano concretamente rientrano in 16 classi possibili evidenziate in Tabella 1.

$d = n + 2$	$\gamma = k + 1$	classe	$F_n(k)$	$T_n$
3	1	$\{3, 1\}$	1	1
4	1	$\{4, 1\}$	1	1
5	1	$\{5, 1\}$	1	3
	2	$\{5, 2\}$	2	
6	1	$\{6, 1\}$	1	5
	2	$\{6, 2\}$	4	
7	1	$\{7, 1\}$	1	11
	2	$\{7, 2\}$	6	
	3	$\{7, 3\}$	4	
8	1	$\{8, 1\}$	1	21
	2	$\{8, 2\}$	8	
	3	$\{8, 3\}$	12	
9	1	$\{9, 1\}$	1	43
	2	$\{9, 2\}$	10	
	3	$\{9, 3\}$	24	
	4	$\{9, 4\}$	8	

Tabella 2. Classi di nodi

## Bibliografia

- [1] T. Fink Y. Mao, *85 modi di annodare la cravatta*, Edizioni Bompiani, Milano, 2007.
- [2] T. Fink Y. Mao, Designing tie knots by random walks, Nature **398**, 1999.
- [3] T. Fink Y. Mao, Tie knots, random walks and topology, Physica A 276: 109-121, 2000.

## Sitografia

- [1] Encyclopedia of Tie Knots <http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~tmf20/tieknots.shtml>